

**КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА
ФАКУЛЬТЕТ КОМП'ЮТЕРНИХ НАУК ТА КІБЕРНЕТИКИ
Кафедра прикладної статистики**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»

Заступник декана
з навчальної роботи

_____ Людмила ОМЕЛЬЧУК

«__» _____ 20__ року

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Актуарна математика

для студентів

галузь знань	12 – Інформаційні технології
спеціальність	124 – Системний аналіз
освітній рівень	бакалавр
освітня програма	Системний аналіз
вид дисципліни	обов'язкова

Форма навчання	денна
Навчальний рік	2024/2025
Семестр	8
Кількість кредитів ECTS	3
Мова викладання, навчання та оцінювання	українська
Форма заключного контролю	іспит

Викладач: **д.ф.-м.н., Олександр ВОЙНА** (лекції, практичні заняття)

Пролонговано: на 20__/20__ н.р. _____(_____) «__»____20__р.

на 20__/20__ н.р. _____(_____) «__»____20__р.

КИЇВ – 2025

Розробник:

Олександр ВОЙНА доктор фіз.-мат. н., професор кафедри прикладної статистики
Київського національного університету імені Тараса Шевченка

ЗАТВЕРДЖЕНО

Зав. кафедри Прикладної Статистики

_____ (Ірина РОЗОРА)

Протокол № __ від «__» _____ 20__ р.

Схвалено. Гарант освітньо-професійної програми першого рівня вищої освіти "Системний
аналіз" _____ Михайло ШАРАПОВ

Протокол від «__» _____ 20__ року №__

Голова науково-методичної комісії _____ Тетяна КАРНАУХ

(підпис)

1. Мета дисципліни:

Метою навчальної дисципліни «Актуарна математика», що є складовою частиною циклу професійної підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «бакалавр» освітньої програми зі спеціальності «Системний аналіз», є одержання студентами базових знань, що стосуються теоретичних та практичних аспектів функціонування страхового ринку та систем соціального забезпечення, набуття практичних навичок застосування математичних методів до розв'язування конкретних задач. При цьому акцент робиться на використанні теоретичних положень у практичних актуарних розрахунках та дослідженні питань оптимальності відповідних процедур.

2. Попередні вимоги до опанування або вибору навчальної дисципліни:

Знати: Необхідне оволодіння результатами навчання основних математичних предметів, таких як основи аналізу функцій; теорії ймовірностей та математичної статистики; програмування; дослідження операцій, основи економічних знань.

Знання теоретичних основ: методів та математичних засобів аналізу конкретних практичних ситуацій з метою будування формальних моделей, методів їх імітаційного моделювання з використанням загальнодоступного комп'ютерного забезпечення та інтерпретації отриманих результатів.

3. Анотація навчальної дисципліни:

Дисципліна «Актуарна математика» є складовою освітньо-професійної програми підготовки фахівців за першим (бакалаврським) рівнем вищої освіти галузі знань 12 «Інформаційні технології» зі спеціальності 124 «Системний аналіз», освітньо-професійної програми «Системний аналіз». Дисципліна є обов'язковою. Викладається в 8-му семестрі, обсяг 90 год., (3 кредити ECTS), з них лекції – 28 год., практичні – 14 годин, самостійна робота – 48 год. Передбачено 2 змістовні частини, 2 контрольні роботи та іспит.

В результаті вивчення навчальної дисципліни студенти повинні:

знати: суть загальних проблем, пов'язаних з теоретичними та практичними аспектами страхування, як специфічної ланки фінансової системи, загальні підходи до побудови відповідних математичних моделей тривалості життя, роль факторів невизначеності в системах страхування та основи базових методів актуарних розрахунків.

вміти: ефективно використовувати існуючі методи розрахунку нетто премій за основними типами пенсійних схем, та створювати нові інформаційно-математичні засоби в цій галузі.

4. Завдання (навчальні цілі)

набуття знань, умінь та навичок (компетентності) на рівні сучасних досягнень в галузі методів моделювання процесів страхування, практичних аспектів аналізу страхового ринку та систем соціального забезпечення, відповідно до освітньої кваліфікації бакалавра з системного аналізу. Зокрема, розвивати:

- Здатність до абстрактного мислення, аналізу та синтезу. K01
- Здатність планувати і управляти часом. K03
- Здатність спілкуватися державною мовою усно і письмово. K05
- Здатність бути критичним і самокритичним. K08
- Здатність формалізувати проблеми, описані природною мовою, у тому числі за допомогою математичних методів, застосовувати загальні підходи до математичного моделювання конкретних процесів. K18
- Здатність використовувати сучасні інформаційні технології для комп'ютерної реалізації математичних моделей та прогнозування поведінки конкретних систем а саме: об'єктно-орієнтований підхід при проектуванні складних систем різної природи, прикладні математичні пакети, застосування баз даних і знань. K23
- Здатність розробляти експериментальні та спостережувальні дослідження і аналізувати дані, отримані в них. K26
- Здатність системно аналізувати свою професійну і соціальну діяльність, оцінювати накопичений досвід. K27

5. Результати навчання за дисципліною

Результат навчання (1. знати; 2. Вміти; 3. Комунікація; 4. Автономність та відповідальність)		Форми (та/або методи і технології) викладання і навчання	Методи оцінювання та пороговий критерій оцінювання (за необхідності)	Відсоток у підсумковій оцінці з дисципліни
Код	Результат навчання			
PH1.1	Знати та розуміти суть загальних проблем, пов'язаних з теоретичними та практичними аспектами страхування, як специфічної ланки фінансової системи.	<i>Лекція, практичні заняття, самостійна робота</i>	<i>Поточне оцінювання, контрольні роботи 1, 2, іспит</i>	15%
PH1.2	Знати загальні підходи до побудови відповідних математичних моделей тривалості життя та володіти основами і конкретними методами актуарних розрахунків.	<i>Лекція, практичні заняття, самостійна робота</i>	<i>Поточне оцінювання, контрольні роботи 1, 2, іспит</i>	15%
PH1.3	Знати та розуміти роль факторів невизначеності в системах страхування, усвідомлювати взаємозв'язки актуарної математики з іншими науковими дисциплінами, зокрема з теорією ризику.	<i>Лекція, практичні заняття, самостійна робота</i>	<i>Поточне оцінювання, контрольні роботи 1, 2, іспит</i>	15%
PH2.1	Вміти ефективно використовувати існуючі методи розрахунку нетто премій за основними типами пенсійних схем, та створювати нові інформаційно-математичні засоби в цій галузі. Вміти вибрати відповідні в конкретній ситуації методи фінансової математики до аналізу та розрахунку страхових та пенсійних рент. Мати навички використання таблиць смертності в практичних розрахунках.	<i>Лекція, практичні заняття, самостійна робота</i>	<i>Поточне оцінювання, контрольні роботи 1, 2, іспит</i>	25%
PH3.1	Обґрунтовувати власний погляд на задачу, спілкуватися з колегами з питань формалізації задач в області страхування та вибору методів їх розв'язання; складати письмові звіти, демонструвати навички взаємодії з іншими людьми, вміння працювати в командах..	<i>Самостійна робота</i>	<i>Поточне оцінювання, контрольна робота 1, іспит.</i>	20%
PH.4.1	Відповідально ставитися до виконуваних робіт, нести відповідальність за їх якість та своєчасну звітність.. Організувати свою самостійну роботу, здобувати та вдосконалювати свої знання в області страхування та актуарної математики.	<i>Самостійна робота</i>	<i>Поточне оцінювання, контрольна робота 1, іспит.</i>	10%

6. Співвідношення результатів навчання дисципліни з програмними результатами навчання

Результати навчання дисципліни	РН1.1	РН1.2	РН1.3	РН2.1	РН3.1	РН4.1
Програмні результати навчання						
<i>(з опису освітньої програми)</i>						
ПРО3 Вміти визначати ймовірнісні розподіли стохастичних показників та факторів, що впливають на характеристики досліджуваних процесів, досліджувати властивості та знаходити характеристики багатовимірних випадкових векторів та використовувати їх для розв'язання прикладних задач, формалізувати стохастичні показники та фактори у вигляді випадкових величин, векторів, процесів.	+	+	+	+	+	
ПРО14 Розуміти і застосовувати на практиці методи статистичного моделювання і прогнозування, оцінювати вихідні дані.				+	+	+

7. Схема формування оцінки

7.1. Форми оцінювання студентів:

Семестрове оцінювання:

Максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: **60 балів:**

1. Контрольна робота №1: РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН2.1: – **15 балів / 9 балів.**
2. Контрольна робота №2: РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН2.1, РН3.1, РН4.1: – **15 балів / 9 балів.**
3. Поточне оцінювання: РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН2.1, РН3.1, РН4.1: – **30 балів / 12 балів.**

Підсумкове оцінювання (іспит):

- максимальна кількість балів які можуть бути отримані студентом: **40 балів / 24 бали.**
- результати навчання, які оцінюються: РН1.1, РН1.2, РН1.3, РН2.1, РН3.1, РН4.1
- форма проведення: письмова робота.
- види завдань: 3 письмових завдання (**одне** теоретичне питання та **дві** практичні задачі з їх теоретичним обґрунтуванням).
- для отримання загальної позитивної оцінки з дисципліни оцінка за іспит повинна бути не меншою ніж 24 бали.
- студент не допускається до іспиту, якщо протягом семестру він набрав менше ніж 36 балів

Критерії оцінювання на іспиті

Завдання	Тема завдання	Максимальний відсоток від 40 балів	Всього відсотків
Завдання 1	Питання з теоретичного матеріалу	20%	20%
Завдання 2	Практичне завдання з теоретичним обґрунтуванням	40%	40%
Завдання 3		40%	40%

Контрольні запитання до змісту предмету.

1. Соціальне та особисте страхування: історія розвитку.
2. Найбільш загальні страхові поняття.
3. Необхідність страхування (зокрема соціального).
4. Числові методи визначення ефективності фінансових операцій.
5. Теорія відсотка. Головні характеристики фінансових операцій.
6. Головні схеми нарахування відсотків. Базовий період.
7. Схеми простих та складних відсотків.
8. Дисконтування в схемах простих та складних відсотків.
9. Схеми складних відсотків з багаторазовою капіталізацією.
10. Змішані схеми: ефективна ставка процента.

11. Ефективна дисконтна ставка.
12. Потоки платежів. Майбутня (FV) та сучасна (PV) вартість грошей.
13. Зустрічні потоки, очищена (NPV) вартість грошей.
14. Внутрішня ефективність операції.
15. Загальна модель неперервної капіталізації коштів.
16. Сила росту проценту.
17. Процентна ставка (rt) та сила росту проценту ($\delta(t)$).
18. Фінансові ренти: ренти *пренумерандо* та *постнумерандо*.
19. Фінансові ренти: параметри та класифікація.
20. Ренти «*пост*» та «*пре*» «нумерандо»: види та параметри.
21. Ренти типу аннуїтету.
22. Нескінчені, або вічні ренти постнумерандо.
23. p -термінові ренти.
24. p -термінові вічні ренти.
25. Річна рента з m -разовим, нарахування відсотків.
26. p -термінова рента з m -разовим, нарахування відсотків ($p = m$).
27. Відкладені ренти типу аннуїтету.
28. Загальні характеристики відкладених рент.
29. Поділ ренти між двома учасниками.
30. Визначення параметрів постійних рент.
31. Визначення розміру члена ренти.
32. Розрахунок строку (n) ренти.
33. Визначення розміру процентної ставки r .
34. Чиста вартість потоку та внутрішня ефективність операції.
35. Ефективна ставка фінансової операції.
36. Внутрішня ефективність фінансової ренти.
37. Керування ризиком в моделях страхування. Нетто-премія. Страхові надбавки.
38. Нетто-премія. Принцип рівності фінансової відповідальності.
39. Аналіз моделей короткострокового страхування: нетто-премія, надбавка за ризик.
40. Ризик банкрутства для моделі короткострокового страхування.
41. Наближені методи тарифних розрахунків: Апроксимація Пуассона.
42. Розподіли Бернуллі, біноміальний та Пуассона.
43. Розрахунок страхових надбавок при апроксимація Пуассона.
44. Наближені методи тарифних розрахунків: Апроксимація Гауса.
45. Нормальний розподіл та функція Лапласа.
46. Наближений розподіл сумарного позову S .
47. Розрахунок страхових надбавок при апроксимація Гауса.
48. Моделі довгострокового страхування: принципова відмінність від короткострокових.
49. Схема неперервного нарахування відсотків з постійною силою росту проценту δ : сучасна вартість.
50. Фінансове забезпечення в моделях довгострокового страхування.
51. Принцип «*рівності фінансової відповідальності*» в довгостроковим страхуванні.
52. Умова уникнення банкрутства в в довгостроковим страхуванні.
53. Аналіз моделей довгострокового страхування: приклади актуарних розрахунків.
54. Розрахунок надбавок в довгостроковим страхуванні: визначення параметрів розподілу.
55. Нетто-премія (p_0) в довгостроковим страхуванні: стала інтенсивність смертності.
56. Тривалість життя. Поняття функції виживання та її властивості.
57. Крива смертності. Параметри тривалості життя.
58. Інтенсивність смертності.
59. Приклади розподілів тривалості життя: Розподіл де Муавра.
60. Приклади розподілів тривалості життя: Розподіл Гомперца.
61. Приклади розподілів тривалості життя: Розподіл Мейкхама.
62. Приклади розподілів тривалості життя: Розподіл Вейбулла.
63. Залишковий час життя людини та його розподіл.
64. Основні актуарні характеристики, пов'язані з залишковою тривалістю життя.
65. Залишковий час життя в класичних моделях.
66. Символіка актуарної математики.

67. Інтенсивність смертності для залишкового часу життя.
68. Урізана тривалість (округлений час) залишкового життя.
69. Момент смерті всередині року: рівномірний розподіл дня смерті τ .
70. Інтенсивність смертності для рівномірної гіпотези.
71. Момент смерті всередині року: постійна інтенсивність смертності.
72. Момент смерті всередині року: гіпотеза Балдуччі.
73. Моделювання страхових ризиків.
74. Структуровані та рандомізовані моделі індивідуальних позовів.
75. Неперервні моделі індивідуальних позовів.
76. Пуассонівський процес.
77. Властивості процесу Пуассона.
78. Динамічна модель індивідуального ризику: припущення моделі.
79. Імовірність банкрутства.
80. Характеристичний коефіцієнт.
81. Умова Крамера.
82. Нерівність Лундберга.
83. Спрощені, (або загальні) таблиці, їх зв'язок з функцією виживання.
84. Таблиці тривалості життя в страхових розрахунках: приклади актуарних ймовірностей.
85. Нетто-премія (p_0) страхової ренти.
86. Страхові ренти. Ціна страхового аннуїтету постнумерандо.
87. Страхові ренти. Ціна страхового аннуїтету пренумерандо.
88. Страхові ренти. Ціна негайного довічного страхового аннуїтету.
89. Таблиці тривалості життя: зміст та принципи побудови.
90. Комутаційні функції.
91. Поділ комутаційних функцій: функції типу D_x, N_x .
92. Поділ комутаційних функцій: функції типу C_x, M_x .
93. Таблиці тривалості життя в актуарних розрахунках: аннуїтети *постнумерандо* та *пренумерандо*.
94. Таблиці тривалості життя в актуарних розрахунках: *страхування життя* („life insurance”).

7.2 Організація оцінювання

Терміни проведення оцінювання

Контрольна робота №1: після Теми 6,

Контрольна робота №2: після Теми 10.

Поточне оцінювання: протягом семестру.

За відсутності студента з поважних причин він має право здати контрольні роботи у встановлений викладачем термін протягом навчального семестру.

7.3 Шкала відповідності оцінок

Відмінно / Excellent	90-100
Добре / Good	75-89
Задовільно / Satisfactory	60-74
Незадовільно / Fail	0-59

8. Структура навчальної дисципліни. Тематичний план лекцій і практичних занять

№ п/п	Назва лекції	Кіл. годин		
		Лк	Пр	С/Р
Частина I. Ймовірності та статистичні методи в актуарних розрахунках.				
1	Тема 1. Базові поняття актуарної математики. (<i>Самостійне опрацювання</i>). <i>Соціальне страхування: необхідність структура та функції.</i> Математичні підходи до моделювання та вимірювання ризику. <i>Аналіз ризику. Ризик та ймовірність. «Ризик» в якості «товару» в моделях страхування.</i> Самостійна робота. <i>Страховий бізнес та зародження актуарної математики. Ризик та демографічна статистика. Опрацювання лекційного матеріалу.</i>	2	0	4
2	Тема 2. Керування страховим ризиком: короткострокові моделі. <i>Моделі короткострокового страхування. Індивідуальний позов: величина нетто-премії.</i> <i>Надбавка за ризик як інструмент керування ризиком.</i> Самостійна робота. <i>Схема Бернуллі, «масові» явища. Граничні теореми: Пуассона. Муавра-Лапласа. Функція Лапласа. Опрацювання лекційного матеріалу.</i>	2	2	4
3	Тема 3. Наближені методи тарифних розрахунків. <i>Гранична теорема Пуассона. Апроксимація Пуассона. Розрахунок ціни страхового полісу.</i> Самостійна робота. <i>Актуарні розрахунки. Ефективність операцій. Предмет фінансової математики. Нові напрямки фінансового аналізу. Характеристики фінансових операцій. Розв'язання індивідуальних завдань.</i>	2	2	4
4	Тема 4. Апроксимація Гауса. <i>Центральна гранична теорема та функція Лапласа. Наближений розподіл сумарного позову S. Розрахунок ціни полісу.</i> Самостійна робота. <i>Неузгоджена капіталізація в схемі складних відсотків. Неперервна капіталізація. Розв'язання індивідуальних завдань.</i>	2	2	4
5	Тема 5. Тривалість життя. Основні моделі. <i>Крива смертності $f(x)$; функція виживання $s(x)$. Інтенсивність смертності. Приклади розподілів тривалості життя: Муавра; Гомперца; Мейкхама; Вейбулла.</i> Самостійна робота. <i>«Ефективна ставка» та «ефективність операції». Потоки платежів. Майбутня (FV) та сучасна (PV) вартість внутрішня ефективність.»</i> ; <i>Розв'язання індивідуальних завдань.</i>	2	2	4
6	Тема 6. Майбутній та округлений час життя. <i>Майбутній час життя в класичних моделях. Символіка актуарної математики. Інтенсивність смертності (μ_{x+t}) особи у віці x років. Дробова частина тривалості життя.</i> Самостійна робота. <i>Фінансові ренти. Параметри та класифікація рент; страхові ренти. Страхові аннуїтети. Вічні ренти. Розв'язання індивідуальних завдань. Лекційний матеріал.</i>	2	0	4
7	Тема 7. Довгострокове страхування. <i>Особливості та фінансове забезпечення. Зв'язок з короткостроковим страхуванням. Керування ризиком.</i> Самостійна робота. <i>Таблиці тривалості життя. Базові показники; Нетто-премія страхової ренти. Розв'язання індивідуальних завдань.</i>	2	1	4
8	Тема 8. Класичні гіпотези тривалості людського життя. <i>Демографічна та «емпірична основа» актуарних розрахунків. Гіпотези розподілу дня смерті τ. Рівномірна; постійної інтенсивності; Балдуччі.</i> Самостійна робота. <i>Комутаційні функції: Поділ: функції D_x, N_x, функції C_x, M_x. Страхові аннуїтети. Страхування життя Підготовка до контрольної.</i>	2	1	4

№ п/п	Назва лекції	Кіл. годин		
		Лк	Пр	С/Р
Частина II. Математичне моделювання страхових ризиків.				
9	Контрольна робота №1.	2	0	4
10	Тема 9. Математичне моделювання страхових ризиків. <i>Керування ризиком. Структуровані та рандомізовані моделі позовів - практична інтерпретація. Самостійна робота. Ймовірнісні характеристики потоку позовів. Неперервна рандомізація Динамічні моделі. Підготовка до контрольної.</i>	2	2	4
11	Контрольна робота №2.	2	0	4
12	Тема 10. Модель динаміки страхових подій: пуассонівський процес. <i>Гамма-розподіл та розподіл Паретто. Неперервна рандомізація. Процес Пуассона. Самостійна робота. Моделювання випадкових величин та процесів. Імітаційна модель процесу Пуассона. Виконання завдань. Лекційний матеріал.</i>	2	2	4
13	Тема 11. Динамічна модель індивідуального ризику. <i>Припущення і параметри. Ймовірність банкрутства. Стохастичні тотожності, рекурентні рівняння. Самостійна робота. Ефективність фінансової ренти. Ефективна ставка, внутрішня ефективність. Підготовка до іспиту.</i>	2	2	4
14	Тема 12. Характерний коефіцієнт та ризик банкрутства. <i>Умова Крамера. Характерний коефіцієнт для базових розподілів. Нерівність Лундберга. Самостійна робота. Розв'язання індивідуальних завдань. Підготовка до іспиту.</i>	2	0	4
	ВСЬОГО	28	14	48

Загальний обсяг **90 год.**, ., в тому числі:

Лекцій – **28 год.**

Практичні – **14 год.**

Самостійна робота – **48 год.**

9. Рекомендовані джерела

Основні:

1. **Promislov** “*Fundamentals of Actuarial Mathematics*. Third Edition”, John Wiley & Sons Ltd, 2015.
2. **D.C.M. Dickson, M.R. Hardy and H.R. Waters** “*Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*. Second Edition”, Cambridge University Press, New York, 2013.
3. **Marco Corazza**, et. al. “*Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*”, Springer International Publishing AG, Cham, 2018.
4. **Война О.А.**: «*Ризик в фінансових процесах та методи дослідження кон'юнктури*». – Кошалін, ПК. 2009, – 446 с.
5. **Война О.А.** «*Економічний ризик. Математичні моделі та методи керування*». – Київ. ВПЦ «Київський університет», 2001, – 100 с.
6. **О.Г. Ханін** “Математичні моделі ризикового страхування”, Східноєвропейський національний університет, Луцьк, 2018.
7. **О.Д. Борисенко, Ю. С. Мішура, В.М. Радченко, Г.М. Шевченко.**: «*Збірник задач з фінансової математики*». – Київ. 2007, – 255 с.

Додаткові:

8. **М.В. Карташов** “*Процеси Маркова в актуарній математиці*”. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2007.
9. **М.М.Леоненко, Ю.С.Мишура, В.М.Пархоменко, Я.И.Ядренко** “*Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансової математиці*”, К. : Інформтехніка, 1995.
10. **Война О. А.** *Керування ризиком в багатовимірних моделях страхування. // Журнал обчислювальної та прикладної математики. № 2(95). 2007, с. 13 – 23.*
11. **І.О. Ковтун** та ін.: «*Основи актуарних розрахунків*». – К: Алерта, 2004, – 328 с.
12. **A.O. Petters, X. Dong** “*An Introduction to Mathematical Finance with Applications*” Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology, 2016.

Матеріали з Інтернет – джерел, що стосуються сучасного стану в області ймовірнісних та статистичних методів і моделей пенсійного та медичного страхування. *Самостійне* опрацювання ряду відповідних додаткових літературних позицій.